Naturkonstanten & Größen

Lichtgeschwindigkeit (Vakuum): $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$

Gravitationskonstante: $G^* \approx 6{,}674\,30(15) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$

Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

astronomische Einheit: $1\,\mathrm{au} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

Avogradro-Konstante: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,/\mathrm{mol}$

Einheiten

Größe	Zeichen	Einheit	
Beschleunigung	a	$\mathrm{m/s^2}$	
Dichte	ϱ	$\mathrm{kg/m^3}$	
Drehimpuls	L	$\mathrm{kg\,m^2/s}$	
Druck	p	$\mathrm{kg/(m\,s^2)}$	$= \mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$
Energie, Drehmoment	E, M	$\mathrm{kg\,m^2/s^2}$	$= \mathrm{N\,m} = \mathrm{J}$
Federkonstante	k	$\mathrm{kg/s^2}$	$= \mathrm{N/m}$
Frequenz	f	$1/\mathrm{s}$	$= \mathrm{Hz}$
Geschwindigkeit	v	$\mathrm{m/s}$	
Impuls	p	$\mathrm{kg\,m/s}$	$= \mathrm{N\,s}$
Kraft	F	$\mathrm{kg\,m/s^2}$	$= \mathrm{N}$
Leistung	P	$\mathrm{kg\,m^2/s^3}$	$= \mathrm{J/s} = \mathrm{W}$
Trägheitsmoment	J_A	$\mathrm{kg\,m^2}$	
Viskosität, dynamisch	η	$\mathrm{kg/(m\,s)}$	$= \mathrm{Pa\,s}$
Viskosität, kinematisch	ν	$\mathrm{m/s^2}$	
Wärmekapazität, spez.	c	$\mathrm{m^2/(s\,K)}$	$= \mathrm{J/(kg\,K)}$

1 Mechanik der Massenpunkte

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0 \quad \text{(konst. Beschleunigung)}$$

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = a_0 \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0}$$

$s(t)$

$v(t) = \dot{s}(t)$

$a(t) = \ddot{s}(t)$

Waagerechter Wurf: $x(t) = v_0 \cdot t, \quad y(t) = y_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$$y(x) = y_0 - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}, \quad \text{Wurfweite:} \quad x_w = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}}$$

Schräger Wurf: $x(t) = v_x \cdot t, \quad y(t) = v_y \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \quad \text{Wurfweite:} \quad x_w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha \quad \text{Wurfhöhe:} \quad y_h = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2(\alpha)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_y \cdot t, \quad y(x) = y_0 - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2} + x \cdot \tan\alpha$$

Senkrechter Wurf: Spezialfall: $\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad v_x = 0$

$$y(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad y_h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad x_w = 0,$$

1.1 Dynamik

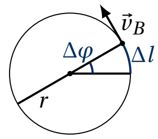
Drei Newtonsche Axiome:

1. Trägheitsprinzip: Kraftfreiheit $\Rightarrow$ geradlinig gleichförmige Bewegung.
2. Aktionsprinzip: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \vec{a}$ (konst. Masse)
3. Reaktionsprinzip: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, actio = reactio

Hooksches Gesetz: $\vec{F} = k \cdot \Delta\vec{x}$

Superpositionsprinzip: $\vec{F}_{\text{ges.}} = \sum_i \vec{F}_i \overset{N=2}{\Rightarrow} F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$

Gleichförmige Kreisbewegung:



Bogenlänge: $\Delta l = 2\pi r \cdot \frac{\Delta\alpha}{360°} = r\Delta\varphi$

Bahngeschwindigkeit: $v_B = \frac{\Delta l}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v_B}{r}$

Umlaufzeit: $T = \frac{2\pi r}{v_B} = \frac{2\pi}{\omega}$ Drehfrequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Zentripetalbeschleunigung: $\boxed{a_z = \frac{v_B^2}{r}} = r \cdot \omega^2$

Zentripetalkraft: $F_z = -a_z \cdot m = -\frac{v_B^2}{r} \cdot m = -m \cdot \omega^2 \cdot r$

Schiefe Ebene: $\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$
Hangabtriebskraft: $\vec{F}_H = \vec{F}_G \cdot \sin\alpha$, Normalkraft: $\vec{F}_N = \vec{F}_G \cdot \cos\alpha$

Berechnung von Seilkräften: An jedem Seilende eine Kraftgleichung aufstellen $\boxed{\vec{F}_{\text{Seil}} + \vec{F}_{\text{ext.}} = m \cdot \vec{a}}$

1.2 Arbeit, Energie, Leistung:

Definition der Arbeit: $\boxed{W = \int_S \vec{F}_s \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$, Leistung: $\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}$, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2 = \frac{p^2}{2m}$

Potentielle Energie (gravitativ): $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$

Potentielle Energie (Feder): $E_{\text{pot,Feder}} = \frac{k}{2} \cdot (\Delta x)^2$

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m \cdot \vec{a}$

Elastischer Stoß:
Impulserhaltung (IES): $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$
Energieerhaltung (EES): $\frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2)$
speziell: $m_1 < m_2 \Rightarrow u_1 < 0 \quad m_1 > m_2 \Rightarrow v_1 > u_1 > 0$

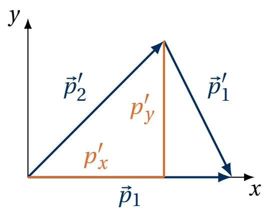
Schiefer elastischer Stoß: reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

IES: $(p_2')^2 = (p_x')^2 + (p_y')^2$
$(p_1')^2 = (p_1 - p_x')^2 + (p_y')^2$

EES: $\frac{(p_1)^2}{2m_1} = \frac{(p_1')^2}{2m_1} + \frac{(p_2')^2}{2m_2}$

$\Rightarrow 2\mu \cdot v_1 p_x' = (p_x')^2 + (p_y')^2$

$\Rightarrow \boxed{(p_x' - \mu \cdot v_1)^2 + (p_y')^2 = (\mu \cdot v_1)^2}$



$\Rightarrow p_x', p_y'$ liegen auf *Stoßkreis* mit $R = \mu \cdot v_1$ und Mittelpunkt $(\mu \cdot v_1, 0)$
Spezialfall: $m_1 = m_2 \Rightarrow \mu = \frac{m}{2} \Rightarrow$ Stoßwinkel immer $90°$ (Thaleskreis)

(vollständig) Inelastischer Stoß:
$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$
$E_{\text{kin}_1} = E_{\text{kin}_2} + E_{\text{therm}}, \quad E_{\text{kin}_2} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot u^2$

Schwerpunkt:
$m_{\text{ges}} \cdot \vec{r}_s = (m_1 + m_2) \cdot \vec{r}_s = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2$
$\Rightarrow \vec{r}_s = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}_2$

Raketengleichung: $v(T) = v_0 + v_e \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{end}}}\right) - g \cdot T$

T = Brenndauer
m_0 = Startmasse, m_{end} = Endmasse
v_e = Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffs

1. kosmische Geschwindigkeit: $v_{k,1} = \sqrt{G^* \cdot m/r} = \sqrt{g \cdot r}$

2. kosmische Geschwindigkeit: $v_{k,2} = \sqrt{2G^* \cdot m/r} = \sqrt{2 \cdot g \cdot r}$

Ballistisches Pendel: $v_G = \left(1 + \frac{m_P}{m_G}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \Delta x$

1.3 Reibung

Gleit- und Haftreibung: $F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$
Schiefe Ebene: $\mu = \tan\alpha$ mit Grenzwinkel α zwischen Gleit- und Haftreibung. Im Allgemeinen gilt: $\mu_H > \mu_G$

Stokesreibung: (Fluide, laminare Strömung)
Kugel mit Radius r bewegt sich mit Geschwindigkeit v durch Fluid mit Viskosität η. Reibungskraft: $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot r$ (6 Physiker essen viel Reis)

Newtonreibung: (Fluide, turbulente Strömung)
Körper mit Querschnittsfläche A, Widerstandskoeffizient c_w bewegt sich durch Fluid mit Dichte ϱ.
Reibungskraft: $F_R = \frac{1}{2} \cdot c_w \varrho \cdot A \cdot v^2$
Reynolds-Zahl: $Re = \varrho \cdot \frac{v \cdot l}{\eta} \approx 1200$ Übergang von Stokes → Newton

2 Mechanik starrer Körper

Voraussetzung zur Drehung: $|\vec{r}| \neq 0 \wedge \vec{r}_i \nparallel \vec{F}_i$

Drehmoment: $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad |\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin\alpha}$
$\vec{M}$ axialer Vektor, $\vec{r}, \vec{F}$ polare Vektoren
$\vec{M}$ beschreibt Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper
Körper im Gleichgewicht $\Leftrightarrow \vec{M} = 0$

Garnrolle: Grenzwinkel $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{R_{\text{innen}}}{R_{\text{aussen}}}\right), \quad \begin{cases} \alpha < \alpha_0 & \text{folgsam} \\ \alpha > \alpha_0 & \text{unfolgsam} \end{cases}$

Winkelgeschwindigkeit:
$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r} \times \vec{\varphi} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{r} \perp \vec{r},\ \mathrm{d}\vec{r} \perp \mathrm{d}\vec{\varphi}$
Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_B = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} =: \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$ axialer Vektor

Rotationsenergie:
$$E_{\text{rot}} = \sum_i \Delta E_{\text{kin, i}} = \sum_i \frac{1}{2}\omega^2 m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i r_i^2 \varrho v_i = \boxed{\frac{1}{2} J_A \omega^2}$$

Trägheitsmoment:
Widerstand eines starren Körpers gegenüber Änderung der Rotationsbewegung um eine gegebene Achse A.

Allgemeine Definition: $\boxed{J_A = \int_V \varrho r_\perp^2 \mathrm{d}^3 r}$

Körper	Trägheitsmoment J_A
Punktmasse:	$J_A = m \cdot r^2$
Vollzylinder (Symmetrieachse):	$J_A = 1/2 \cdot m \cdot r^2$
Vollzylinder (Querachse):	$J_A = 1/4 \cdot m \cdot r^2 + 1/12 \cdot m \cdot L^2$
Hohlzylinder:	$J_A = 1/2 \cdot m \cdot (R_A^2 + R_i^2)$
Vollkugel:	$J_A = 2/5 \cdot m \cdot r^2$
Hohlkugel:	$J_A = 2/5 \cdot m \cdot \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
langer, dünner Stab:	$J_A = 1/12 \cdot m \cdot l^2$
Kegel:	$J_A = 3/10 \cdot m \cdot r^2$

Volumenelemente:
Zylinder: $\mathrm{d}V = L \cdot 2\pi \cdot r\ \mathrm{d}r$ bzw. $\mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}z$
Kugelkoordinaten: $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi$

Steinerscher Satz: $J_{A'}$ mit Achse A' durch Schwerpunkt bekannt
Achse A von J_A parallel im Abstand a $\Rightarrow J_A = J_{A'} + m \cdot a^2$

Gleichgewichtslagen: $\sum F_i = 0, \quad \sum M_i = 0$

- **a)** stabil: Kraft und Drehmomente wirken zur GGL
- **b)** instabil: Kraft und Drehmomente wirken von GGL weg
- **c)** metastabil: kleine Auslenkung: stabil, größere $\Rightarrow$ instabil
- **d)** indifferent: keine Veränderung der GGL durch Kraft

Drehimpuls: $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J_A \cdot \vec{\omega}}$

Bewegungsgleichung: $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin\alpha = J_A \cdot \dot{\vec{\omega}}$

Translation	$\vec{r}$	Rotation	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschw.	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	Winkelbesch.	$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Masse	$m = \int_V \varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$	Trägheitsmoment	$J_A = \int_V \varrho(\vec{r}) r_\perp^2\,\mathrm{d}V$
Kraft	$\vec{F}$	Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J_A \cdot \vec{\omega}$
Bew.gleich.	$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}$	Bew.gleich.	$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$
Newton II	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Newton II	$\vec{M} = J_A \cdot \vec{\alpha}$

3 Gravitation und Planetenbahnen

Gravitationsgesetz: $\boxed{\vec{F}_G(\vec{r}) = -G^* \frac{m \cdot M_E}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}} = m \cdot \vec{g}(\vec{r})$
Feldstärke: $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -G^* \frac{M_e}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
Potentielle Energie: $E_{\text{pot}} = -G^* \frac{m \cdot M}{r}$, Potential: $V_{\text{pot}}(r) = -G^* \frac{M_E}{r}$

Keplersche Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen mit der Sonne (Masse M) in einem Brennpunkt.
2. Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen: $\frac{\Delta A}{\Delta t} =$ konstant für alle Planeten. ($\vec{L}$ - Erhaltung)
3. $\boxed{\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{4\pi^2}{M \cdot G^*}}$ = konstant für alle Planeten (a = große Halbachse)

$$E_{\text{ges, Planet}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - m \cdot \frac{G^* m}{r}$$

4 Bezugssysteme, Trägheitskräfte

Inertialsystem:
Koordinaten- oder Bezugssystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig gleichförmig bewegen (Newton I)

Galilei-Transformation: (Transformation zwischen IS)
$$\left.\begin{aligned} t &\to t + \tau \\ \vec{r} &\to \vec{r} + \vec{r}_0 \\ \vec{r} &\to \hat{R}\vec{r} \\ \vec{r} &\to \vec{r} + \vec{v} \cdot t \end{aligned}\right\}$$
Newton'sche Bewegungsgesetze + Axiome sind *invariant* unter Galilei-Transformation (Translation der Zeit $t + \tau$, Translation des Raums $\vec{r} + \vec{r}_0$, Rotationen $\hat{R}\vec{r}$, Bewegung mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v} \cdot t$)

Trägheitskräfte:
Angenommene zusätzliche (Schein)Kraft auf einen Körper, der sich nicht geradlinig gleichförmig in einem Bezugssystem bewegt.

Corioliskraft: $\boxed{\vec{F}_c = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \quad \vec{a}_c = 2(\vec{v} \times \vec{\omega})}$
Wirkt auf alle Körper, die sich in einem mit $\vec{\omega}$ rotierenden Bezugssystem mit $\vec{v} \nparallel \vec{\omega}$ bewegen.
Ablenkung (Bogenlänge): $y = v\omega t^2 = \frac{1}{2} \cdot a_c \cdot t^2$
Focault'sches Pendel: Rotationsgeschwindigkeit $\omega_c = \sin\varphi \frac{2\pi}{24h}$

Spezielle Relativitätstheorie:
Relativistischer Gamma-Faktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$
Lorentztransformation (in x):
$x' = (x - v \cdot t) \cdot \gamma, \quad y' = y, \quad z' = z$
$ct' = (t - v/c \cdot x) \cdot \gamma$
Längenkontraktion: $\Delta x' = \gamma \cdot \Delta x$ (Bewegte Objekte schrumpfen)
Zeitdilatation: $\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$ (Bewegte Uhren gehen langsamer)
Relative Masse: $m = \gamma \cdot m_0$
Relativer Impuls: $\vec{p} = \gamma \cdot m_0 \vec{v}$
Relative Gesamtenergie: $E = \gamma \cdot m_0 c^2$

5 Mechanische Schwingungen

Freie, ungedämpfte Schwingung:

Pendelschwinger: $l\ddot{\varphi}(t) + g\varphi(t) = 0$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T}}$

Federschwinger: $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Schneckenfeder: $J_A\ddot{\varphi}(t) + k^*\varphi(t) = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{J_A}}$

physik. Pendel: $J_A\ddot{\varphi}(t) + dmg\varphi(t) = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{dmg}{J_A}}$

allg. Lösung: $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$ für $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = 0$

Freie, gedämpfte Schwingung:

Reibungskoeffizient R: Kraft $F_R = -R\cdot\dot{x}(t)$

Federschwinger (Pendel/Schneckenfeder analog):

$$\boxed{\underbrace{m\cdot\ddot{x}(t)}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{R\cdot\dot{x}(t)}_{\text{Reibung}} + \underbrace{k\cdot x(t)}_{\text{Rückstellkraft}} = 0}$$

allg. Lösung: $x(t) = x_0\cdot e^{-\delta t}\cdot\cos(\omega t)$ mit $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}}$, $\delta = \frac{R}{2m}$

Fall 1: freie ungedämpfte Schwingung:

$R = 0$ (keine Reibung) $\Rightarrow$ $\delta = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

Fall 2: Gedämpfte Schwing. mit abklingender Amplitude: $\omega > 0$

$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2} > 0$ $\Leftrightarrow$ $0 < R < 2\cdot\sqrt{k\cdot m}$ $x_{\max}(t) = x_0\exp(-\delta t)$

und reduzierter Frequenz $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

Fall 3: Aperiodischer Grenzfall: $\omega = 0$

$\omega = \frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2} = 0 \Leftrightarrow R = 2\cdot\sqrt{k\cdot m}$ $\Rightarrow$ $x(t) = x_0\cdot(1+\delta t)\cdot\exp(-\delta t)$

Fall 4: Kriechfall: ω imaginär, keine Schwingung

$R > 2\cdot\sqrt{km},$ $x(t) = x_0\cdot\exp(-\delta' t)$ $\delta' = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Erzwungene Schwingungen:

Periodische, externe Anregung des Systems mit $F_{\text{ext}}(t)$

$$\underbrace{m\cdot\ddot{x}(t)}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{R\cdot\dot{x}(t)}_{\text{Reibung}} + \underbrace{k\cdot x(t)}_{\text{Rückstellkraft}} = \underbrace{F_0\cos(\omega_{\text{ext}} t)}_{F_{\text{ext}}(t)}$$

allg. Lösung: $x(t) = x_{\max}(\omega_{\text{ext}})\cos[\omega_{\text{ext}} t - \alpha(\omega_{\text{ext}})]$

$$x_{\max}(\omega_{\text{ext}}) = F_0\cdot\sqrt{m^2\left(\frac{k}{m} - \omega_{\text{ext}}^2\right)^2 + R^2\omega_{\text{ext}}^2}^{\,-1}, \quad \tan\alpha = \frac{R\cdot\omega_{\text{ext}}}{m(k/m - \omega_{\text{ext}}^2)}$$

Resonanzfrequenz: $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{2m^2}}$ (Frequenz mit max. Amplitude)

Gekoppelte Schwingungen:

1. Auslenkung in gleiche Richtung: $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{g/l}$
2. Auslenkung entgegengesetzt: gegenphasige Schwingung:

   $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\cdot\frac{l^2}{L^2}}$ (höhere Frequenz)
3. Pendel 2 in Ruhe, Pendel 1 schwingt: Energieübertrag mit Schwebungsfrequenz: $\Delta_\omega = \omega_1 - \omega_2$ abhängig von k, m, l

5.1 Wellen

Räumliche Ausbreitung einer Schwingung zwischen benachbarten schwingungsfähigen Systemen aufgrund benachbarter Kopplung, Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist konstant.

Invarianz der Wellenform: $f(x,t) = f(x-ct)$, dabei ist $x - ct$ die Phase der Welle

Transversalwelle: $\perp$ zur Ausbreitungsrichtung (bspw. Licht)

Longitudinalwelle: $\parallel$ zur Ausbreitungsrichtung (bspw. Schall)

Wellenlänge $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ mit Wellenzahl k

allg. Form: $f(x,t) = f_0\sin\big((kx - \omega t) + \varphi_0\big) = f_0\sin\big(k(x-ct) + \varphi_0\big)$

Phasengeschwindigkeit: $v_{\text{Phase}} = \boxed{c = \frac{\omega}{k}} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \boxed{\lambda f} = \frac{\omega}{2\pi}\lambda$

Ebene Welle in 3D: $f_E(\vec{r},t) = f_0\sin\big((k\vec{r} - \omega t) + \varphi_0\big)$

Kugelwelle in 3D: $f_K(\vec{r},t) = \frac{f_0}{r}\sin\big((k\vec{r} - \omega t) + \varphi_0\big)$

5.2 Wellengleichung:

allg. Form: $\boxed{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0}$

Transversale Seilwelle: $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F_0}{\varrho\cdot A}}$, F_0 - Seilkraft, A - Querschnitt

Lösungen: $y_1(t) = y_0\cos(kx - \omega t)$ mit $v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F_0}{\varrho A}}$

$y_2(t) = y_0\cos(kx + \omega t)$

5.3 Überlagerung von Wellen:

1) gleiche ω, unterschiedl. Richtung:

$y_1(x,t) = y_0\cos(kx + \omega t)$ (nach links)

$y_2(x,t) = y_0\cos\big(kx - \omega t - \varphi_0\big)$ (nach rechts)

$y_{\text{ges}}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2y_0\cos\left(kx - \frac{\varphi_0}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right)$

$\Rightarrow$ keine Ausbreitung, sondern stehende Welle

Schwingungsknoten bei $x_K = n\frac{\lambda}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen)

Schwingungsbäuche bei $x_B = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$ (Maxima/Minima)

2) verschiedene ω, gleiche Richtung:

$y_1(t) = y_0\cos(\omega_1 t)$ $\omega_1 = 2\pi f_1$

$y_2(t) = y_0\cos(\omega_2 t)$ $\omega_2 = 2\pi f_2$

$$\boxed{y_{\text{ges}}(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2\cdot y_0\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}$$

Gemittelte Frequenz: $f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}$

Für $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$ tritt der *Schwebungseffekt* auf

Frequenz der Einhüllenden Schwebung: $f_S = \frac{f_1 - f_2}{2}$

Schwebungsfrequenz : $\boxed{f_{\text{Schweb.}} = |f_1 - f_2|} = 2f_S$

Überlagerung beliebiger Frequenzen und Amplituden:

Bestimmung der Frequenzverteilung $\tilde{f}(\omega)$ (Frequenzspektrum) mithilfe der Fouriertransformation:

$$\tilde{f}(\omega) = \mathscr{F}(f(t))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Bestimmung der zeitlichen Funktion aus dem Frequenzspektrum durch inverse Fouriertransformation

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}(\tilde{f}(\omega))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

5.4 Dopplereffekt:

v_B - Geschwindigkeit Beobachter   oberes VZ - Bew. aufeinander zu
v_S - Geschwindigkeit Quelle   unteres VZ - Bew. voneinander weg

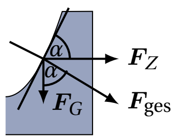
1. Beobachter ruht: $f' = f \cdot \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{c_s}} \approx f\left(1 \pm \frac{v_Q}{c_s}\right)$ für $v_Q \ll c_s$
   Überschallgeschwindigkeit $v_Q \geq c_s : f' \to \infty$ für $v_Q \to c$
   $v_Q > c$: Machscher Kegel (Schockwelle) $\sin\vartheta = \frac{c}{v_B} < 1$
2. Quelle ruht: $\boxed{f' = f\left(1 \pm \frac{v_B}{c_s}\right)}$
3. Beide bewegen sich: $f' = f_s \frac{c_s \pm v_B}{c_s \mp v_Q}$

Änderung der Schallgeschwindigkeit:
Bei gleichem λ der stehenden Wellenlänge, ändert sich die Frequenz:
Schallgeschwindigkeit $c_s = \sqrt{\frac{\kappa p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\kappa R T}{M_{\text{mol}}}}$
R - Universelle Gaskonstante = 8,1314 J/(kg mol)
κ - Adiabatenkoeffizient = 1,4 (Luft), 1,67 (Helium)

6 Hydrostatik, Hydrodynamik

rotierende Flüssigkeit: Höhenprofil $z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2$

Oberfläche $\perp$ Kraft $\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{F_z}{F_G} = \frac{\omega^2 r}{g}$



Statischer Druck:
Druck auf Oberfläche als Normalkraft pro Flächenelement:
$p = \frac{F_\perp}{A}$, $[P] = 1\,\text{Pa} = 10^{-5}\,\text{bar}$

Schweredruck: $p = \varrho_F g h \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\varrho_F g$
Hydrostatisches Paradoxon: Schweredruck in Flüssigkeit hängt nur von Tiefe, nicht Gefäßform ab.

Auftrieb: $\vec{F}_A = -\vec{F}_{\text{G,fl}} = m_{\text{fl}} \cdot g \cdot \vec{e}_z$ (Archimedisches Prinzip) Der statische Auftrieb eines Körpers in einem Medium ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.

Gesetz von Boyle-Marriotte (Gase): $p_1 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 = \text{const.}$

Barometrische Höhenformel: $p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{h}{8\,\text{km}}\right)$, $\frac{g\varrho_0}{p_0} \approx \frac{1}{8\,\text{km}}$
Abnahme des Luftdrucks in $\uparrow$ Höhe (Kompressibilität)

Hydro- und Aerodynamik

Euler-Gleichung: $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{u}v \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\varrho}\vec{\nabla} p$ (Reib. = 0)

Kontinuitätsgleichung: (Erhaltung der Gesamtmasse)
$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varrho \vec{v}) = 0$, $v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{const.}$

Bernoulli-Gleichung: $\boxed{p_0 + \frac{1}{2} \cdot \varrho v_0^2 = p_1 + \frac{1}{2} \cdot \varrho v_1^2}$
$\Rightarrow$ Druck an Engstelle mit höherer Fließgeschwindigkeit geringer.
p - potentielle Energiedichte, $\varrho/2v^2$ - kinetische Energiedichte

Reale Strömungen: Reibungsterm $\vec{F}_R = -\eta A \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}r}$

transversales Strömungsprofil (Rohr, Radius R): $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$

Hagen-Poiseuillesches Gesetz: $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int \varrho v(r)\,\mathrm{d}A = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}$

Gesetz von Gay-Lussac: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{const.}$

Gesetz von Charles: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \text{const.}$

7 Wärmelehre

Temperatur: mittlere kinetische Energiedichte $\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2} m \cdot \overline{v}^2 = \frac{f}{2} k_B T$

Freiheitsgrad: f - unabhängige Bewegungsmöglichkeit eines Atoms oder Moleküls z.B. in Form von Translation, Rotation oder Schwingungen

Umrechnung: $T_{°\text{C}} = (T_{°\text{F}} - 32) \cdot 5/9$ und $T_{°\text{F}} = T_{°\text{C}} \cdot 9/5 + 32$
$T_{°\text{C}} = T_{\text{K}} + 273.15$, absoluter Nullpunkt: $T = 0\,\text{K}$

spezifische Wärmekapazität: $c = \frac{1}{m} \frac{\Delta E}{\Delta T}$, $c_{\text{Wasser}} = 4{,}183\,\text{kJ/(kg K)}$

ideales Gasgesetz: $\boxed{p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T}$, $N-$ Teilchenzahl

Drei Hauptsätze der Thermodynamik:

0.) Makroskopischen Systemen ist eine Temperatur zugeordnet. Zwei Systeme sind im thermischen Gleichgewicht, wenn sich ihre Temperaturen gleichen.

1.) Nimmt ein geschlossenes System die Wärme ΔQ auf und wird die Arbeit ΔW verrichtet, gilt für die innere Energie $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

2.) Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niederer auf einen Körper höherer Temperatur ist (Clausius).

Wärmekapazität (Druck/Volumenen konst.) $c_p = c_V + \frac{N \cdot k_B}{m}$,
Adiabatenkoeffizient: $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

8 Hilfreiche Formeln

Winkelfunktionen

Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$

Verschiebung: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

Additionstheoreme:
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Doppelwinkelfunktionen:
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Trigonometrischer Pythagoras:
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

φ	φ [rad]	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$

Hilfreiche Integrale

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \quad \text{logarithmische Integration}$$

$$\int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{P.I.}$$

Koordinatensysteme

Zylinderkoordinaten: (ϱ, φ, z)
$x = \varrho\cos(\varphi)$
$y = \varrho\sin(\varphi)$
$z = z$
$\mathrm{d}V = \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

Kugelkoordinaten: (r, ϑ, φ)
$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$
$z = r\cos(\vartheta)$
$\mathrm{d}V = r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

Hinweise an: m.beyer@uni-jena.de